Développement : Dénombrement des colorations du cube.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agreg

Énoncé :

Théorème 1 : Le nombre de colorations distinctes du cube avec c couleurs est

$$\frac{c^2}{24}(c^4 + 3c^2 + 12c + 8)$$

On rappelle avant quelques notions :

Proposition 2 : Soit f une transformation affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ et H un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Alors $f(H)$ est un espace affine de même dimension que H.

Corollaire 3 : Soit P un polytope (enveloppe convexe d'un nombre fini de points) et $f \in \mathrm{Isom}^+(D)$. Alors f envoie une face de P sur une face de même dimension.

Proposition 4 : Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Soient $x \in E$ et $g \in G$. Alors les groupes $Stab(gx)$ et $Stab(x)$ sont isomorphes.

Démonstration : Il suffit de considérer l'application $\varphi : Stab(x) \to Stab(gx)$ définie par $\varphi(g_1) = gg_1g^{-1}$. On a bien que φ est un morphisme, est c'est un isomorphisme car c'est un automorphisme intérieurs.

Lemme (Formule de Burnside) 5 : Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. On note r le nombre d'orbites. Alors

$$r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |Fix(g)|.$$

Démonstration : On pose $F = \{(g, x) \in G \times E : g.x = x\}$. On va calculer $|F|$ de deux manières différentes pour obtenir la formule de Burnside. On note $x_1, ..., x_r$ un système de représentants des orbites. Pour le premier calcul, on peut regarder chaque g fixant x pour tout x de E, c'est-à-dire chaque stabilisateur de x. Comme les stabilisateur d'éléments d'une même orbite ont le même cardinal, on en déduit

$$|F| = \sum_{x\in E} |Stab(x)| = \sum_{i=1}^{r} |Orb(x_i)||Stab(x_i)| = \sum_{i=1}^{r} |G| = r|G|.$$

> Car nous savons que les orbites partitionnent E, donc on a que comme dans une même orbite, les stabilisateurs de chaque éléments ont même cardinal, on a une même valeur du stabilisateur dans une orbite et on multiplie donc par la taille de l'orbite pour avoir l'égalité.

Par ailleurs, on a comme deuxième méthode de calcul

$$|F| = \sum_{g \in G} |\{x \in E : g.x = x\}| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|. \qquad \square$$

Résolution :

Soit D un cube qui possède 6 faces, 8 sommets, et 12 arêtes. On numérote $\{f_1, .., f_6\}$ ses faces prises dans un ordre quelconque. D'après le Corollaire 3, toute isométrie positive g du cube induit une permutation des faces du cube. Ainsi pour tout $i \in [\![1\,;6]\!]$, on notera $g(i)$ le numéro de la face sur laquelle est envoyée la face f_i, i.e on a $g(f_i) = f_{g(i)}$. En notant C l'ensemble des couleurs et c son cardinal, une *coloration* du cube peut être vue comme un élément $(v_1, ..., v_6) \in C^6$ qui signifie que l'on colorie la face f_i avec la couleur v_i. Pour différencier deux colorations, on considère l'action de $Isom^+(D)$ sur C^6 définie par :

$$g.(v_1, ..., v_6) = (v_{g(1),...,g(6)})$$

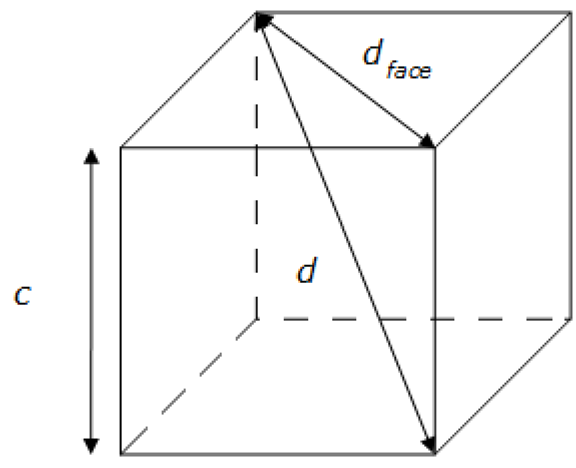
On considère que deux colorations sont distincts si l'on ne peut pas obtenir l'une de l'autre par l'action d'une isométrie positive du cube.

> En effet, on peut se dire que si l'on prends une coloration du cube et que je tourne juste mon cube, c'est la même coloration. Et cette rotation du cube peut être vue comme l'action d'une isométrie positive sur le cube qui change la couleur des faces, mais qui est la même "disposition" qu'avant.

Ainsi le nombre de colorations distincts est le nombre d'orbite de cette action. Pour calculer ce nombre, on va utiliser la formule de Burnside démontré avant. On veut donc trouver les points fixes de notre actions.
Avant de pouvoir appliquer cette formule, il nous faut décrire les éléments de $Isom^+(D)$.

Proposition 6 : On a l'isomorphisme $Isom^+(D) \cong \mathfrak{S}_4$.

Démonstration : Parmi les 28 paires de points de sommets, il y en a exactement quatre de distance maximal, à savoir l'ensemble $\mathcal{D}$ des quatre grandes diagonales du cube $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_4\}$. Comme les isométries conservent les distances, l'image d'une grande diagonale est nécessairement aussi une grande diagonale. Ainsi, à une isométrie du cube g, on peut associer l'unique permutation $\rho(g) \in \mathfrak{S}_4$ correspondant en considérant sa restriction à l'ensemble $\mathcal{D}$. L'application $\rho : Isom^+(D) \to \mathfrak{S}_4$ ainsi définie est un morphisme de groupes.



Montrons que ρ est injectif. Soit $g \in Isom^+(D)$ telle que $\rho(g) = Id$: on a $g(D_i) = D_i$ pour tout $i = [\![1\,;4]\!]$. Supposons par l'absurde que g ne fixe aucun sommet du cube. Alors, comme g préserve les grandes diagonales, g coïncide sur les 8 coins avec la symétrie centrale h de centre l'isobarycentre du cube. Or, si on prend 4 coins non coplanaire, ils forment un repère affine sur lequel coïncident g

et h qui sont alors égaux (pas compris, demandé à quelqu'un). L'isométrie h étant négative (c'est une réflexion), on obtient une absurdité : il existe donc A un sommet du cube tel que $g(A) = A$. Soit B un sommet du cube à distance 1 de A. On sait que $g(B)$ est aussi à distance 1 de $g(A) = A$. Comme g fixe les grandes diagonales, on a soit $g(B) = B$ ou $g(B) = C$ où C est le coin opposé de B.Or, la distance entre A et C est $\sqrt{2}$, ce cas est donc exclus.. Ainsi, les trois sommets à distance 1 de A sont aussi fixés par l'isométrie g qui coïncide donc avec l'identité sur un repère affine. On conclut que $g = Id$ et que le morphisme est donc injectif.
Pour conclure, il reste à montrer que ρ est surjectif. Énumérons les isométries positives du cube :

i) L'identité.

ii) Les rotations d'angle π d'axe passant par les milieux d'arêtes opposés : il y a 12 arêtes, donc il y en a $12/2 = 6$.

iii) Les rotations d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$ d'axe passant par deux sommets opposés : il y a donc 4 axes et 2 rotations par axe, soit 8.

iv) Les rotations d'angle $\pi/2$, π et $3\pi/2$ passant par les centres de faces opposés : il y a donc 3 axes avec 3 rotations par axe, soit 9.

Le cube possède donc au moins 24 isométries positives, donc $|Isom^+(D)| \geq 24$ et comme ρ est injectif, on a $|Isom^+(D)| \leq |\mathfrak{S}_4| = 24$. On en déduit que $|Isom^+(D)| = |\mathfrak{S}_4| = 24$, donc que ρ est surjectif et que l'énumération précédente est complète. □

Démonstration (Théorème 1) : Le nombre de colorations distinctes étant égal au nombre d'orbites de C^6 sous l'action de $Isom^+(D)$, il suffit de calculer, pour tout $g \in Isom^+(D)$, le nombre $|Fix(g)|$ de colorations fixées par g, avant de conclure à l'aide de la formule de Burnside :

i) Pour l'identité : toutes les colorations sont fixées par l'identité, il y en a donc c^6.

ii) Pour une rotation d'angle π d'axe passant par les milieux des arêtes opposés : las faces sont échangées deux à deux, il y a donc c^3 colorations fixées et 6 telles rotations.

iii) Pour une rotation non trivial passant par deux sommets opposés : les faces sont échangées trois par trois, il ya donc c^2 colorations fixées et 8 telles rotations.

iv) Pour une rotation d'angle $\pi/2$ ou $3\pi/2$ d'axe passant par les centres de faces opposés : deux faces sont invariantes, et les quatre autres sont échangées de manière cyclique, il y a donc c^3 colorations fixées et 6 telles rotations.

v) Pour une rotation d'angle π d'axe passant par les centres de faces opposées : deux faces sont invariantes, et les quatre autres sont échangées deux par deux, il y a donc c^4 colorations fixées et 3 telles rotations.

Finalement, on en déduit le nombre de colorations distinctes :

$$r = \frac{1}{24}(c^6 + 6c^3 + 8c^2 + 6c^3 + 3c^4) = \frac{c^2}{24}(c^4 + 3c^2 + 12c + 8).$$